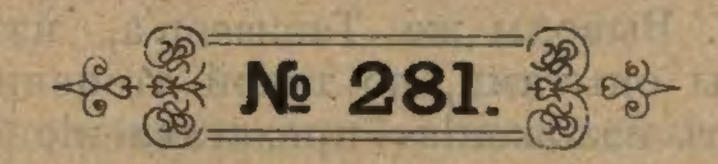
XXIV Сем. № 5.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Содержаніе: Къ вопросу о прерывности твердаго и жидкаго состоянія *Прив.-Доц. Б. Вейнберга.* — Новая геометрія треугольника *Д. Е.* — Задачи для учениковъ № 607—612. Рѣшенія задачъ №№ Объявленія.

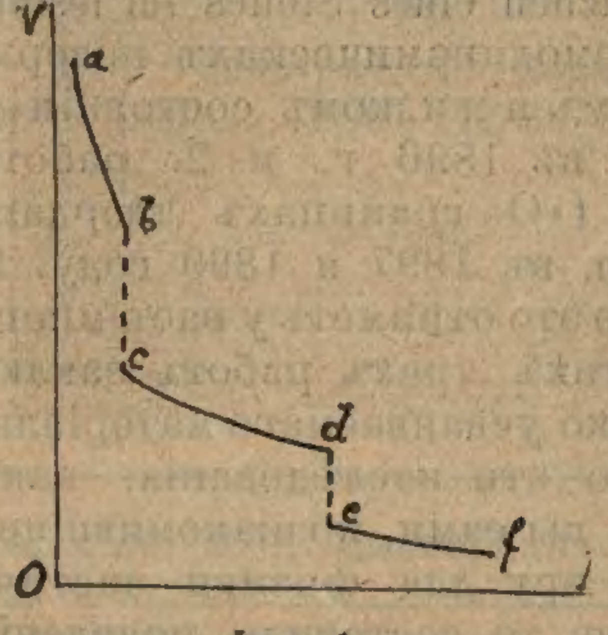
Къ вопросу о прерывности твердаго и жидкаго состояній.

(*Сообщеніе, сдѣланное 17 марта 1900 г. въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей*).

Исполняя просьбу нѣкоторыхъ членовъ отдѣленія, я позволю себѣ занять ваше вниманіе изложеніемъ трехъ работъ профессора химіи въ Юрьевскомъ университетѣ Tammann'а а именно: 1. работы «Ueber die Lage der thermodynamischen Flächen eines Stoffes im festem und flüssigen Zustande» («О положеніи термодинамическихъ поверхностей какого нибудь вещества въ твердомъ и жидкомъ состояніи»), появившейся въ Zeitsch. f. Phys. Chem. въ 1896 г. и 2. работъ «Ueber die Grenzen des festen Zustandes» («О границахъ твердаго состоянія»), появившихся въ Wied Ann. въ 1897 и 1899 году. Я долженъ заранѣе извиниться, что изложеніе это отниметъ у васъ много времени, такъ какъ на 64 страницахъ этихъ трехъ работъ заключается весьма много интереснаго, но не легко усваиваемаго матеріала. Позволяю себѣ сдѣлать это потому, что эти изслѣдованія, какъ мнѣ кажется и какъ, надѣюсь, убѣдитесь вы сами, познакомившись съ ними, составляютъ совершенно новую эру для физики частичныхъ силъ, — такую же эру, какую когда то составило появленіе

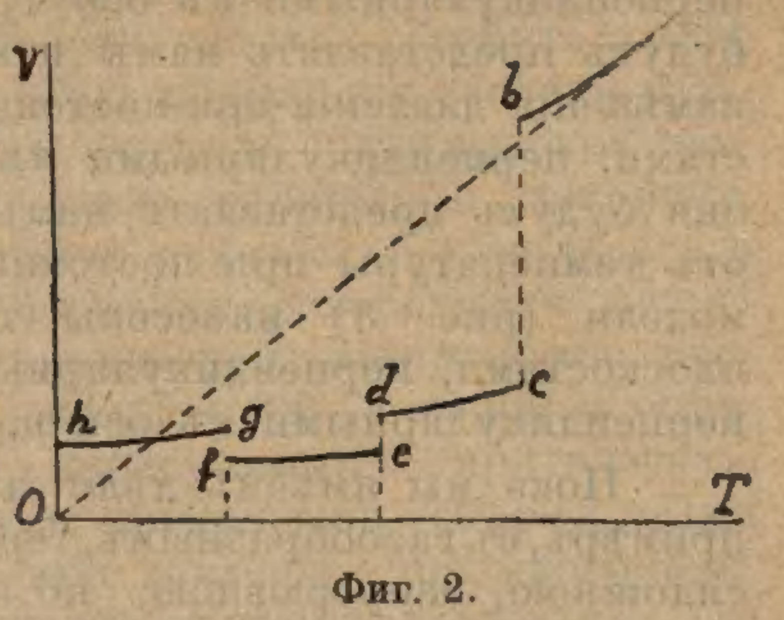
книги Van der Waals'а «Over de continuitet van den Gas-en Vlooistofstand», («О непрерывности газообразнаго и жидкаго состоянія»).

Въ этихъ работахъ, въ особенности во второй, которую отнынѣ можно причислить къ классическимъ произведеніямъ физической литературы, — Tammann смѣло и весьма опредѣленно выражаетъ идею о прерывности твердыхъ и жидкихъ состояній. Эта идея Tammann'а рѣзко противорѣчитъ всему тому строю мыслей о вѣроятной непрерывности твердыхъ и жидкихъ состояній, къ которому приходило большинство физиковъ и химиковъ, будучи какъ бы загипнотизированы широкимъ размахомъ мысли Van der Waals'а и соблазняясь перспективой распространенія ея и на переходъ изъ твердаго въ жидкое состояніе (какъ примѣры укажу Po nting'а, Tlanck'а, Ostwald'а). Выводы же Tammann'а, изъ которыхъ не всѣ пока подтверждены опытами, до такой степени необычны и новы, а руководящая нить изложенія—представленіе о термодинамической поверхности (пока, къ сожалѣнію, несмотря на весьма большое ея удобство и громадное дидактическое значеніе, мало распространенное)—до такой степени трудна по своей простотѣ и по несоотвѣтствію той легкости, съ которою съ ней обращается Tammann, съ непривычкою къ ней большинства изъ насъ, что результатомъ этого было слѣдующее: работы Tammann'а не возбудили пока того жгучаго интереса, какого онѣ заслуживаютъ, тогда какъ несомнѣнно, что для физики собственно онѣ являются гораздо болѣе цѣннымъ пріобрѣтеніемъ, чѣмъ надѣлавшіе столько шума опыты Tesla, телеграфія безъ проводовъ, лучи Röntgen'а,—если сопоставить ихъ съ лучами Lenard'а,—и тому подобныя открытія. Въ виду этого я и начну изложеніе работъ Tamman'а съ выясненія представленія о термодинамической поверхности, причемъ для облегченія усвоенія этого представленія я приготовилъ модель (рис. 3), передающую основныя особенности этой поверхности. Объемъ опредѣленной массы тѣла, — скажемъ, 1 грамма — является функціей температуры и внѣшняго давленія, при которыхъ эта масса находится. Измѣненіе объема при измѣненіи давленія и при постоянной температурѣ можно изобразить графически, откладывая по оси ординатъ объемы и по оси абсциссъ давленія; полученныя кривыя носятъ названіе изотермъ. Такъ, напримѣръ, изотермы идеальнаго газа (часть *ab* на рис. 1) представляютъ собою гиперболы, имѣющія асимптомами ось ординатъ и ось абсциссъ, какъ это непосредственно слѣдуетъ изъ уравненія закона Boyle-Mariotte'а — $pv = RT$ при $T = const$. Измѣненіе объема при измѣненіи температуры и при постоянномъ давленіи можетъ также быть изображено графически, если будемъ откладывать объемы по оси ординатъ, а температуру по оси абсциссъ; полученныя кривыя носятъ названіе изобаръ. Для идеальнаго газа (часть *ab* на



Фиг. 1.

рис. 2) это будетъ прямая, которая при продолженіи пересѣкла бы ось абсциссъ въ точкѣ, соотвѣтствующей нулю абсолютной шкалы температуръ, какъ это слѣдуетъ изъ закона Gay Lussac'а ($pv = RT$ при $p = const$). Замѣтимъ, что уголъ наклона изобаръ пропорціоналенъ коэффиціенту сжатія, а уголъ наклона изотермъ пропорціоналенъ коэффиціенту термическаго расширенія.



Фиг. 2.

Если же мы пожелаемъ изобразить измѣненіе объема въ зависимости и отъ температуры и отъ давленія, то вмѣсто изображенія на плоскости, т. е. въ пространствѣ 2-хъ измѣреній, намъ придется прибѣгнуть къ пространству 3-хъ измѣреній и откладывать, напримѣръ, абсолютныя температуры по оси x'овъ, давленія по оси y'овъ, а объемы по оси z'овъ. Геометрическое мѣсто всѣхъ такихъ точекъ представитъ собою нѣкоторую поверхность, которая и будетъ изображать зависимость объема тѣла отъ температуры и давленія. Такая поверхность и носитъ названіе термодинамической поверхности.



Фиг. 3.

Укажемъ нѣкоторыя ея свойства. Сѣченія ея плоскостями, перпендикулярными къ оси T, будутъ изотермы, такъ какъ онѣ будутъ представлять намъ измѣненіе объема въ зависимости отъ измѣненія давленія при постоянной температурѣ. Сѣченія ея плоскостями, перпендикулярными къ оси p, будутъ изобары, такъ какъ они будутъ представлять намъ измѣненіе объема въ зависимости отъ температуры при постоянномъ давленіи. Для ясности на этой модели (рис. 3) нанесены такія равноотстоящія сѣченія, какъ плоскостями, перпендикулярными къ оси T, такъ и плоскостями, перпендикулярными къ оси p.

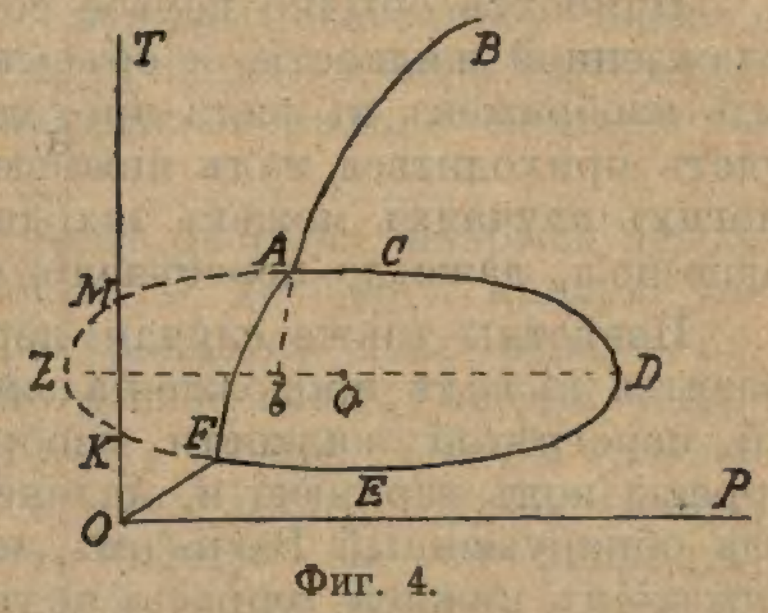
Пока мы имѣемъ дѣло съ однимъ и тѣмъ же состояніемъ, напримѣръ, съ газообразнымъ, термодинамическая поверхность является сплошною, непрерывною, но эта непрерывность исчезаетъ, какъ только мы подходимъ къ переходу изъ одного состоянія въ другое. Будемъ для опредѣленности говорить сначала о переходѣ изъ газообразнаго состоянія въ жидкое при нѣкоторомъ постоянномъ давленіи. При пониженіи температуры объемъ газа уменьшается, причемъ по мѣрѣ подхода къ температурѣ, при которой упругость насыщающихъ пространство паровъ равна этому давленію, наклонъ поверхности становится все меньше и меньше, газъ начинаетъ отклоняться отъ закона Gay Lussac'a; наконецъ, при нѣкоторой температурѣ газъ начинаетъ превращаться въ жидкость и объемъ его сразу падаетъ, такъ что одной и той же температурѣ соотвѣтствуютъ 2 объема:—весьма большой, для тѣла въ газообразномъ состояніи, и значительно меньшій, для тѣла въ жидкомъ состояніи. При среднихъ температурахъ скачекъ получается, гораздо болѣе рѣзкій, чѣмъ тотъ, который для удобства изображенъ на этой изотермѣ и на модели. При дальнѣйшемъ пониженіи температуры объемъ жидкости, вообще говоря, уменьшается, причемъ быстрота уменьшенія (иными словами коэффиціентъ расширенія) меньше, чѣмъ для газообразнаго состоянія, и, наконецъ, при нѣкоторой температурѣ жидкость превращается въ твердое тѣло—и объемъ снова рѣзко, скачкомъ измѣняется — въ громадномъ большинствѣ случаевъ, падаетъ. При дальнѣйшемъ пониженіи температуры происходитъ соотвѣтственно обычнымъ взглядамъ лишь дальнѣйшее, еще болѣе медленное пониженіе объема.

Такимъ образомъ переходы изъ газообразнаго въ жидкое и изъ жидкаго въ твердое состояніе выражаются двумя разрывами непрерывности въ термодинамической поверхности. Поверхность эта пріобрѣтаетъ видъ террасовидной мѣстности, нижній уступъ которой соотвѣтствуетъ твердому состоянію, второй—жидкому, а третій, устремляющійся при повышеніи температуры и при пониженіи давленія въ безконечность,—газообразному состоянію.

При повышеніи давленія, какъ извѣстно, и переходъ изъ твердаго состоянія въ жидкое и переходъ изъ жидкаго состоянія въ газъ совершаются при болѣе высокихъ температурахъ, и при томъ скачекъ между двумя соотвѣтствующими состояніями становится все меньше и меньше, такъ какъ коэффиціентъ сжатія для газовъ

больше, чѣмъ для жидкостей, а для жидкостей больше, чѣмъ для твердыхъ тѣлъи слѣд., верхняя терраса спадаетъ быстрѣе, чѣмъ средняя, а средняя—быстрѣе, чѣмъ нижняя. Будемъ сначала говорить только о верхней и средней террасахъ. По мѣрѣ повышенія давленія разрывъ поверхности приходится при все болѣе и болѣе высокой температурѣ, становится все менѣе и менѣе рѣзкимъ и, наконецъ, при нѣкоторой температурѣ обыкновенно исчезаетъ: и жидкость, и газъ имѣютъ одинаковый объемъ, переходъ совершается непрерывно. Это выражается на термодинамической поверхности превращеніемъ разрыва въ одну точку, координаты которой и опредѣляютъ критическое состояніе и представляютъ критическую температуру, критическое давленіе и критическій объемъ. При температурѣ, выше критической, и при давленіи, превышающемъ критическое, нѣтъ различія между газообразнымъ и жидкимъ состояніемъ и тѣло можетъ находиться только въ одномъ состояніи, которое мы должны считать жидкимъ, если подошли къ нему съ какой нибудь точки второй террасы, и газообразнымъ, если подошли къ нему съ какой нибудь точки верхней террасы.

Если спроектируемъ разрывъ термодинамической поверхности на плоскость Tp, то получимъ кривую AB (рис. 4), выражающую зависимость между давленіями и температурами, при которыхъ происходятъ переходы изъ жидкаго состоянія въ газообразное. Кривую эту обыкновенно называютъ кривою упругости паровъ.



Фиг. 4.

Прежде, чѣмъ перейти къ проекціи другого разрыва термодинамической поверхности на плоскость Tp, укажу, что ходъ кривой упругости паровъ опредѣляется уравненіемъ Clapeyron'а

$$\frac{d\mathrm{T}}{dp}=\frac{\mathrm{T}}{l}(v-v'),$$

гдѣ T—абсолютная температура, p—давленіе, l—теплота испаренія, а v и v'—удѣльные объемы тѣла въ газообразномъ и жидкомъ состояніи. Формула эта, лѣвая часть которой представляетъ измѣненіе температуры кипѣнія при измѣненіи давленія на единицу давленія, прекрасно подтверждается опытами.

Хотя при возрастаніи температуры l убываетъ, но $v-v'$ тоже убываетъ и такъ быстро, что кривая рѣзко загибаетъ къ оси абсциссъ. Замѣтимъ еще, что l и $v-v'$ равны 0 одновременно, чѣмъ и объясняется, что точка B является конечною точкою кривой, ибо въ ней угловой коэффиціентъ $\frac{d\mathrm{T}}{dp}=\frac{0}{0}$.

Подобнымъ же образомъ, если спроектировать разрывъ термодинамической поверхности между средней и нижней террасою на плоскость Tp, то получится кривая AC, которая выражаетъ зависимость между температурою плавленія и давленіемъ, подъ которымъ оно происходитъ, и которую Tammann называетъ кривой упругостей плавленія (Schmelzdruckcurve). Кривыя AC и AB пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ A, носящей названіе «тройной точки», ибо только при температурѣ и давленіи, ей соотвѣтствующихъ, могутъ сосуществовать всѣ 3 состоянія тѣла. Замѣчу, что въ 2 состояніяхъ тѣло можетъ сосуществовать во всѣхъ точкахъ, соотвѣтствующихъ проекціямъ разрывовъ термодинамической поверхности на плоскость Tp, а во всѣхъ другихъ точкахъ этой плоскости тѣло будетъ въ устойчивомъ равновѣсіи только въ одномъ состояніи, причемъ, если оно окажется въ другомъ состояніи, то оно будетъ находиться въ неустойчивомъ равновѣсіи. Такихъ областей неустойчиваго равновѣсія извѣстно нѣсколько, а именно: переохлажденная жидкость, переохлажденный паръ, перегрѣтая жидкость и перегрѣтое твердое тѣло.

Наиболѣе обычно первое состояніе, а именно состояніе переохлажденной жидкости, и объемъ тѣла въ этомъ состояніи можетъ быть изображенъ въ видѣ продолженія средней террасы, которое будетъ приходиться надъ нижнею террасою. Это продолженіе во многихъ случаяхъ можетъ заходить весьма далеко, — по мнѣнію Tammann'а, даже до пересѣченія съ нижней террасой.

Извѣстны также случаи переохлажденія пара, который изобразится въ видѣ продолженія верхней террасы надъ средней. Случай перегрѣтой жидкости изображается продолженіемъ средней террасы подъ верхнюю и, наконецъ, случай перегрѣтаго твердаго тѣла обнаруженный Barus'омъ, на нафталинѣ, представляется продолженіемъ нижней террасы подъ среднюю.

Если переохлаждать жидкость при температурѣ ниже температуры тройной точки, то кривая пара надъ нею представляется въ видѣ кривой Aв, являющейся продолженіемъ кривой AB (въ термодинамической поверхности это будетъ проекція пересѣченія мысленнаго продолженія средней террасы съ мысленнымъ продолженіемъ поверхности разрыва между верхнею террасою и среднею). Упругость же пара надъ твердымъ тѣломъ при этихъ температурахъ будетъ меньше упругости пара надъ жидкостью и изобразится въ видѣ кривой AF.

Такимъ образомъ поверхность разрыва, изображавшая переходъ изъ жидкаго состоянія въ парообразное послѣ тройной точки, когда она начинаетъ изображать переходъ изъ твердаго состоянія въ газообразное (возгонку—sublimation), претерпѣваетъ перегибъ.

Замѣчу, что ходъ кривой AF опредѣляется опять таки уравненіемъ того же вида

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{k}(v - v''),$$

гдѣ k—теплота улетучиванія, а v''—удѣльный объемъ твердаго тѣла.

Въ зависимости отъ того, въ какомъ мѣстѣ давленій мы экспериментируемъ,—выше давленія тройной точки или ниже—твердое тѣло превращается при нагрѣваніи въ жидкость или въ паръ. Въ первомъ случаѣ температура кипѣнія лежитъ выше температуры плавленія, во второмъ — температура кипѣнія ниже температуры плавленія. Послѣдній случай имѣетъ мѣсто даже при высокихъ давленіяхъ,—напримѣръ, для углерода, такъ какъ для него вѣроятное давленіе тройной точки равно многимъ тысячамъ атмосферъ и потому пары углерода превращаются при меньшихъ давленіяхъ прямо въ твердое состояніе, причемъ онъ получается въ видѣ графита, тогда какъ жидкій углеродъ, по всей вѣроятности, кристаллизуется въ видѣ алмаза, чѣмъ и объясняется возможность полученія его только при гигантскихъ давленіяхъ внутри застывающей руды.

Все то, что я говорилъ до сихъ поръ, не представляетъ ничего новаго и становится лишь, мнѣ кажется, болѣе наглядным и понятнымъ при примѣненіи термодинамической поверхности; но въ вопросѣ о формѣ и положеніи той части термодинамической поверхности, которая соотвѣтствуетъ твердому состоянію, Tammann высказалъ совершенно новые взгляды, причемъ весьма интересно прослѣдить, какъ постепенно расширялись и крѣпли его идеи въ этомъ отношеніи.

Я уже сказалъ, что проекція второго разрыва, разрыва между средней террасой и нижней, на плоскость Tp даетъ кривую упругости паровъ. Въ 1896 г., когда обнародовалъ свою первую работу Tammann, вопросъ о ходѣ этой кривой былъ весьма спорнымъ, одни изслѣдованія—Amagat, Ferche, Barus'a, Visser'a – указывали на то, что эта кривая является прямою линіею, другіе—напр., Damien'a, – что она загибаетъ и весьма быстро къ оси абсциссъ, такъ что, напримѣръ, для нафталина получается maximum при 83 атмосферахъ. Теоретическій же ходъ кривой выражается уравненіемъ W. Thomson'a

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{r}(v' - v''),$$

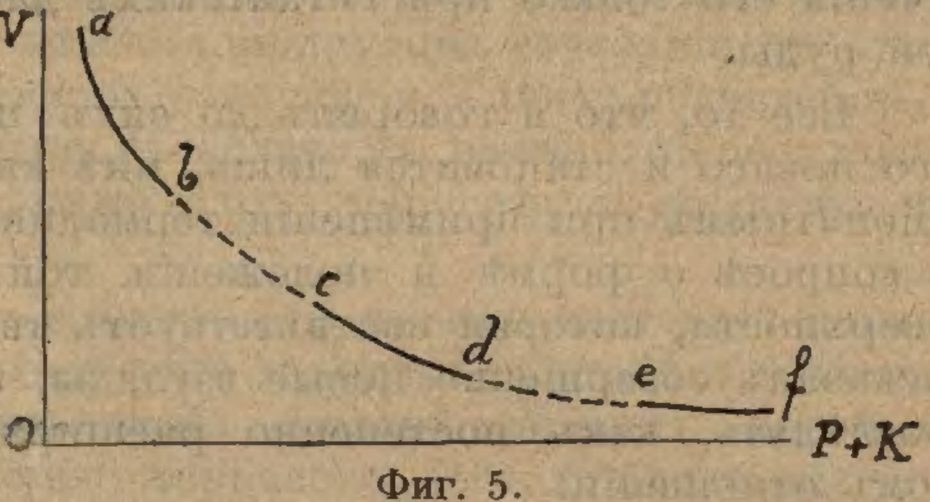
гдѣ r — теплота плавленія, но изъ разсмотрѣнія этого уравненія ничего нельзя было вывести, такъ какъ неизвѣстно было, какъ измѣняется $v'—v''$ (разность удѣльныхъ объемовъ тѣла въ жидкихъ и твердыхъ состояніяхъ) при измѣненіи температуры и давленія вблизи кривой упругости плавленія. Что же касается измѣненія r, то оно опредѣляется уравненіемъ Person'a

$$\frac{dr}{dT} = c' - c'',$$

гдѣ c' и c'' — теплоемкости тѣла въ жидкомъ и твердомъ состояніи, и, такъ какъ $c' > c''$, то извѣстно было, что r съ возрастаніемъ температуры убываетъ.

Въ первой своей работѣ Tammann и попытался рѣшить вопросъ о ходѣ этой кривой, воспользовавшись гипотезой о непре-

рывности термодинамической поверхности. Гипотеза эта заключается въ слѣдующемъ: разрывъ въ термодинамической поверхности происходитъ тогда, когда внутреннее давленіе, обусловливаемое силами между молекулами, претерпѣваетъ рѣзкія, увеличенія скачкомъ и, если выражать объемъ тѣла не въ функціи внѣшняго давленія, а въ функціи общаго давленія, которое оно испытываетъ, т. е. суммы внѣшняго и внутренняго давленій, то разрывъ въ термодинамической поверхности исчезнетъ и она станетъ сплошною и равномѣрно измѣняющеюся. Чтобы сдѣлать эту идею понятной, я начерчу одну изъ изотермъ, какъ она получается изъ термодинамической поверхности въ обычномъ видѣ (рис. 1) и при предположеніи Tammann'a (рис. 5). Пробѣлъ bc могъ бы быть заполненъ переохлажденнымъ паромъ и перегрѣтою жидкостью а пробѣлъ dc—переохлажденною жидкостью и перегрѣтымъ твердымъ тѣломъ, но первыя два состоянія заполняютъ слишкомъ небольшую часть промежутка bc и потому Tammann обращается ко второму промежутку и выводитъ нѣсколько соотношеній производныхъ отъ v по различнымъ параметрамъ, на основаніи которыхъ мы могли бы вывести значеніе внутренняго давленія: если бы изъ всѣхъ соотношеній получилось для него одинаковое число, то гипотеза объ истинной непрерывности термодинамической поверхности стала бы весьма правдоподобною. Къ сожалѣнію измѣненія объема вблизи точки плавленія и при плавленіи изслѣдованы только въ зависимости отъ температуры и поэтому Tammann принужденъ былъ ограничиться лишь повѣркою знаковъ нѣкоторыхъ выведенныхъ имъ неравенствъ, а именно:



Фиг. 5.

$$\frac{dv'}{dT} > \frac{dv''}{dT} \text{ и } \left|\frac{dv'}{dp}\right| > \left|\frac{dv''}{dp}\right| \quad *)$$

т. е. около точки плавленія коэффиціентъ расширенія больше въ жидкомъ, чѣмъ въ твердомъ состояніи, и коэффиціентъ сжатія тоже больше въ жидкомъ, чѣмъ въ твердомъ состояніи, причемъ для повѣрки второго неравенства существуетъ только одно изслѣдованіе Barus'a надъ нафталиномъ. Но уже убѣжденія въ справедливости неравенства

$$\left|\frac{dv'}{dp}\right| > \left|\frac{dv''}{dp}\right|$$

*) Скобки || обозначаютъ, что нужно брать абсолютныя величины этихъ производныхъ.

оказалось для Tammann'a достаточнымъ для вывода одного интереснаго слѣдствія изъ всѣмъ извѣстной до него формулы

$$\frac{dT}{dp}=\frac{T}{r}(v'-v'').$$

Дѣйствительно, если $\left|\frac{dv'}{dp}\right| > \left|\frac{dv''}{dp}\right|$, то $v'-v''$ съ повышеніемъ давленія должно обратиться въ 0, а затѣмъ стать отрицательнымъ. Слѣдовательно $\frac{dT}{dp}$, которое выражается указанной формулой, должно при нѣкоторомъ давленіи стать равнымъ 0, а затѣмъ начать убывать, т. е. въ кривой упругости плавленія долженъ наступить maximum C, послѣ чего она должна падать въ видѣ части CD. Но какъ на поднимающейся вѣтви AC, такъ и на опускающейся вѣтви CD величина $\frac{dr}{dT}>0$,—и слѣд., когда кривая опускается,то r понижается. А разъ оно все болѣе и болѣе понижается , то оно должно дойти до 0. При этомъ будетъ $\frac{dT}{dp}=-\infty$, т. е. касательная въ точкѣ D параллельна оси ординатъ.

	$\frac{dT}{dp}$	$v'-v''$	$\frac{dr}{dT}$
ZAC	+	+	+
CD	+	—	+
DE	—	—	—
EZ	—	+	—

До этого мѣста прослѣдилъ Tammann кривую упругости давленія въ своей первой работѣ. По его мнѣнію въ то время область твердаго состоянія ограничивается кривою ACD и прямою DM, причемъ состоянія тѣла внутри области онъ характеризуетъ тѣмъ, что при нихъ для смѣщенія частицъ (Massentheilchen) другъ относительно друга требуются конечныя силы, а при состояніи тѣла внѣ этой области для этого требуются безконечно малыя силы. При переходѣ черезъ проекцію ACD получается такимъ образомъ разрывъ непрерывности въ величинѣ вязкости (тоже предполагаетъ онъ и относительно электрическаго сопротивленія). Интересно, что при переходѣ черезъ линію DN Tammann предположилъ вѣроятную непрерывность, какъ вязкости, такъ и электропроводности.

Эти робкіе шаги первой работы Tammann'a во второй развиваются уже въ стройную теорію, полную новыхъ и оригинальныхъ мыслей и подтверждаемую во многихъ отношеніяхъ опытными данными, причемъ Tammann поставилъ въ полную аналогію съ этимъ явленіемъ переходы изомѣрныхъ видоизмѣненій твердыхъ тѣлъ одного въ другое. Подобно тому, какъ догадка о существованіи вѣтви CD явилась слѣдствіемъ допущенія, что величина $v'-v''$, перейдя черезъ 0, стала отрицательною, все остальное, созданное Tammann'омъ, явилось слѣдствіемъ того, что онъ не остановился на предположеніи, что r, убывая вдоль вѣтви CD, должно обратиться въ 0, но сдѣлалъ слѣдующее совершенно естественное предположеніе, что r при переходѣ черезъ точку D *становится отрицательнымъ*. Такое предположеніе вполнѣ законно, ибо въ этой точкѣ $v'-v''$ не

равно 0, тогда какъ при переходѣ изъ жидкаго состоянія въ газообразное $v' - v''$ и l одновременно равны 0 и слѣд., тамъ предположить l отрицательнымъ нельзя. А разъ r становится отрицательнымъ, то, такъ какъ $v' - v''$ около точки D тоже отрицательно, то $\frac{dT}{dp}$ будетъ положительнымъ и, слѣд., при пониженіи давленія температура плавленія тоже будетъ понижаться,—т. е. получится часть кривой упругости плавленія DE. Но при пониженіи давленія объемъ жидкости будетъ расти быстрѣе объема твердаго тѣла и, хотя онъ первоначально былъ меньше объема твердаго тѣла, онъ можетъ стать равнымъ и, наконецъ, стать больше его, т. е. $v' - v''$ переходитъ черезъ 0 въ положительную величину, а тогда, такъ какъ r все еще отрицательно, $\frac{dT}{dp}$ станетъ тоже отрицательнымъ. При дальнѣйшемъ пониженіи давленія температуры плавленія станутъ расти и на кривой упругости давленія получается часть EK. Полученную часть кривой упругости ACDEK Tammann дополняетъ частью AM, соотвѣтствующей тому состоянію жидкости ниже тройной точки, когда въ соприкосновеніи съ твердымъ тѣломъ находится жидкость, и частью KZM, идущею въ область отрицательнаго давленія.

Мнѣ кажется подобное распространеніе кривой KZM не совсѣмъ правильнымъ, ибо ниже тройной точки A твердое тѣло можетъ при повышеніи температуры переходить только въ газообразное состояніе. Такимъ образомъ, по моему мнѣнію, область твердаго состоянія въ сторону къ оси T должна ограничиваться кривою упругости пара надъ твердымъ тѣломъ AF. Точка пересѣченія этой кривой съ кривой EK — точка F — будетъ второю тройною точкою при которой возможно сосуществованіе всѣхъ трехъ состояній тѣла. Дальнѣйшій ходъ кривой упругости пара выразится тогда кривою FO, изображающею упругость пара надъ жидкостью.

О возможности существованія этой второй тройной точки говоритъ и Tammann, но такъ какъ онъ допускаетъ, что твердыя и жидкія тѣла могутъ имѣть конечный объемъ при внѣшнемъ давленіи, равномъ 0, этой тройной точки можетъ и не быть. Замѣчу однако, что, продолжая кривую упругости давленія за тройную точку, Tammann тѣмъ самымъ допускаетъ, что за предѣлами этой кривой тѣло не можетъ существовать въ твердомъ состояніи, а будетъ въ жидкомъ, или газообразномъ. Какъ можетъ не быть второй тройной точки, такъ, замѣчу отъ себя, можетъ и не быть всей части кривой упругости давленія DEK, если линія нулевой температуры пересѣкаетъ эту кривую выше точки D. Укажу кстати, что линія нулеваго давленія можетъ пересѣкать эту кривую, или въ сегментахъ LC и LE, какъ это имѣетъ мѣсто для громаднаго большинства тѣлъ, при плавленіи возрастающихъ въ объемѣ, или же въ сегментахъ CD и DE, какъ это имѣетъ мѣсто, напр., для льда, который при плавленіи уменьшается въ объемѣ.

Еще болѣе нагляднымъ становится все это при взглядѣ на модель термодинамической поверхности. Какъ средняя терраса, такъ и нижняя, понижаются при удаленіи въ область бо́льшихъ и бо́льшихъ давленій, но средняя терраса понижается быстрѣе, становится, наконецъ, вровень съ нижней (обладая однако и въ этомъ мѣстѣ болѣе быстрымъ подъемомъ по отношенію къ возрастающимъ температурамъ), а затѣмъ опускается все ниже и ниже, такъ что нижняя терраса твердаго тѣла превращается въ плоскогорье, возвышающееся надъ этой средней террасой жидкаго тѣла,—плоскогорье съ небольшимъ скатомъ, какъ въ сторону возрастающихъ давленій, такъ и въ сторону убывающихъ температуръ. Окружающая же его терраса жидкаго тѣла имѣетъ большій скатъ, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ направленіи. Обрывъ, граничащій эти двѣ терассы мало по малу заворачиваетъ внутрь плоскогорья, ограничивая его, какъ со стороны болѣе низкихъ температуръ, такъ и со стороны болѣе низкихъ давленій. Идя вокругъ этого плоскогорья, мы въ нѣкоторой точкѣ (соотвѣтствующей точкѣ D) находимся выше всего надъ окружающей террасою жидкаго состоянія, а затѣмъ эта терраса, какъ болѣе круто поднимающаяся въ сторону понижающихся давленій, подходитъ все больше и больше къ плоскогорью твердаго тѣла и, наконецъ, снова начинаетъ возвышаться надъ нимъ; при достаточно низкомъ давленіи это возвышеніе встрѣчаетъ обрывъ террасы газообразнаго состоянія, высоты края котораго представляли бы собою, если бы сдѣлать модель значительно болѣе высокою, удѣльные объемы пара, насыщающаго пространство надъ этой жидкостью. Та вертикаль, на которой край этого новаго возвышенія средней террасы надъ нижней встрѣчаетъ указанный обрывъ верхней террасы, и будетъ представлять собою вторую тройную точку.

Таковы слѣдствія, выведенныя Tammann'омъ изъ разсмотрѣнія вѣроятной формы термодинамической поверхности, — говорю вѣроятной по тому, что при выводѣ этой формулы Tammann'у пришлось сдѣлать предположеніе о существованіи maximum'а кривой упругости плавленія, — а это предположеніе, онъ въ первой своей работѣ обосновывалъ другимъ *предположеніемъ* о сплошности термодинамической поверхности при выраженіи объемовъ въ функціи температуры и *суммы внѣшняго и внутренняго давленія*. Замѣчу, что такое предположеніе для случая перехода изъ жидкаго состоянія въ газообразное заключается въ формулѣ Van der Waals'а и выражаетъ одну изъ основныхъ частей мысли о непрерывности жидкаго и газообразнаго состояній, другую часть которой представляетъ возможность непрерывнаго перехода изъ одного состоянія въ другое.

Посмотримъ теперь, какими опытными данными Tammann подтвердилъ или сдѣлалъ вѣроятнымъ тотъ рядъ совершенно новыхъ слѣдствій, которыя можно вывести изъ такого вида термодинамической поверхности. Какъ наиболѣе рѣзкіе примѣры, укажу два изъ этихъ слѣдствій:

1. При достаточно высокихъ давленіяхъ всѣ тѣла могутъ существовать только въ жидкомъ состояніи (замѣчу, что состояніе

это можно назвать жидкимъ или газообразнымъ, смотря по тому, пришли ли мы къ нему съ какой нибудь точки средней или самой нижней террасы, или съ какой нибудь точки верхней террасы).

2. Нѣкоторыя твердыя тѣла, будучи достаточно охлаждены, должны снова обращаться въ жидкое состояніе, которое и будетъ представлять собою единственно возможное для нихъ состояніе устойчиваго равновѣсія при очень низкихъ температурахъ при любомъ давленіи.

Такимъ образомъ соотвѣтственно этимъ идеямъ тѣло, находящееся въ твердомъ состояніи при обычныхъ условіяхъ, *должно при достаточномъ нагрѣваніи* обращаться въ жидкое состояніе (а при дальнѣйшемъ послѣдующемъ нагрѣваніи — въ газообразное), но *можетъ* обращаться въ жидкое состояніе и при достаточномъ *охлажденіи*.

Основнымъ предположеніемъ для выводовъ Tammann'а является предположеніе о существованіи maximum'а у кривой упругости плавленія. Какъ я уже указалъ, опытныя данныя, которыми располагалъ Tammann ко времени появленія въ свѣтъ второй его работы, были и недостаточны, и противорѣчивы. Въ 3-ей работѣ онъ устраняетъ противорѣчія между ними, указывая вѣроятныя причины ошибокъ въ нѣкоторыхъ изслѣдованіяхъ, и приводитъ рядъ полученныхъ имъ численныхъ данныхъ для весьма широкихъ предѣловъ давленія

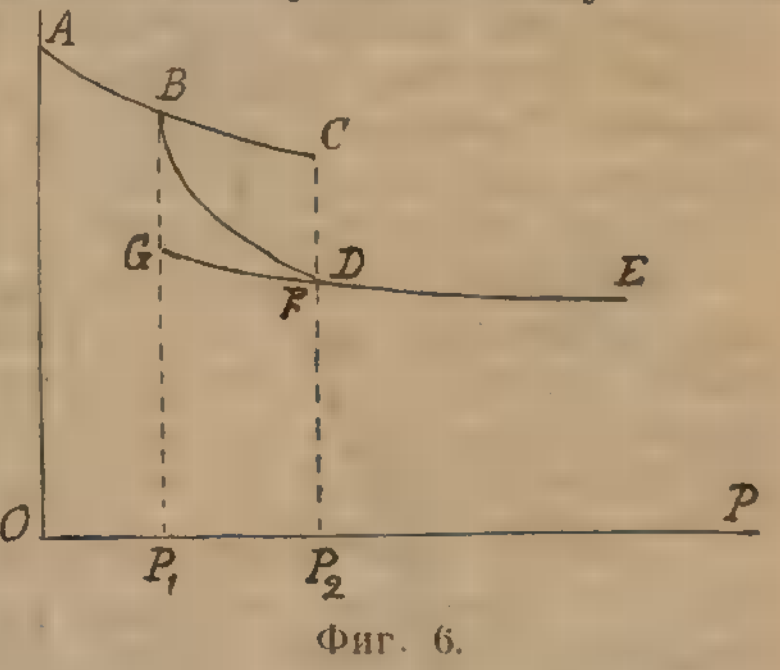
Разберемъ тѣ данныя, которыя были къ 1897 г. Опыты Ferche и Visser'а отличаются большой точностью, но произведены въ узкихъ предѣлахъ давленія (нѣсколько десятковъ атмосферъ). Amagat при изслѣдованіи сжатія жидкостей доходилъ до 1000 съ лишнимъ атмосферъ и обнаружилъ, что четыреххлористый углеродъ, который до того времени былъ извѣстенъ при обычной температурѣ только въ жидкомъ состояніи при достаточномъ сдавливаніи, обращается при большихъ давленіяхъ въ твердое состояніе. Результаты этихъ опытовъ приведены здѣсь, но изъ этихъ данныхъ нельзя вывести никакого заключенія относительно направленія кривизны кривой упругости давленія.

Четыреххлористый углеродъ (Regnault) (Amagat)		Нафталинъ (Barus)		
t	p	t	p	$\frac{\Delta p}{\Delta \tau}$
— 24.7	1	79.2	1	
— 19.5	210	83.0	80	26.0
0.0	620	90.0	277	27.7
10.0	900	100.0	567	29.3
19.5	1160	130.0	1435	28.7

Кромѣ Amagat до такихъ и даже болѣе высокихъ давленій доходилъ Barus въ опытахъ съ нафталиномъ и его результаты показываютъ нѣкоторую, хотя и слабую, вогнутость кривой упругости плавленія въ сторону оси давленія.

Здѣсь умѣстно будетъ указать на тѣ трудности, которыя представляютъ подобнаго рода изслѣдованія помимо необходимости работать съ высокимъ давленіемъ и точно измѣрять послѣднее. Трудности эти проистекаютъ отъ двухъ обстоятельствъ: отъ переохлажденія жидкости и отъ присутствія примѣсей. Эти два вліянія наглядно иллюстрируются рисункомъ, изображающимъ ходъ изотермы при подобныхъ опытахъ.

По мѣрѣ увеличенія давленія объемъ жидкости понижается по кривой AB (рис. 6) но вслѣдствіе явленія переохлажденія можно легко перейти «упругость плавленія» p_1—т. е. то давленіе, при которомъ жидкость и кристаллическій, скажемъ, нафталинъ находятся въ равновѣсіи,—и жидкость закристаллизовываться нѣкоторое время не будетъ. Длина куска изотермы, соотвѣтствующей этому состоянію переохлажденія жидкости, зависитъ отъ способности произвольной кристаллизаціи — отъ числа произвольно появляющихся очаговъ кристаллизаціи за единицу времени въ единицѣ объема (объ этомъ будетъ рѣчь дальше,) — слѣд., «упругость отвердѣванія» p_2, по достиженіи которой жидкость закристаллизовывается, и объемъ тѣла измѣняется по изотермѣ кристаллическаго состоянія DE, будетъ зависѣть отъ количества нафталина и отъ времени. Чѣмъ больше взято вещества и чѣмъ медленнѣе повышается давленіе, тѣмъ кусокъ BC меньше, и тѣмъ меньше отличается p_2 отъ p_1.



Фиг. 6.

Упругость же плавленія p_1 не зависитъ .ни отъ количества вещества, ни отъ скорости увеличенія давленія, но за то опредѣленіе ея затрудняется вліяніемъ примѣсей. Всякія примѣси, какъ извѣстно, понижаютъ температуру плавленія и, слѣд., чтобы температура плавленія осталась тою же, приходится повысить давленіе, такъ какъ при повышеніи давленія повышается и температура плавленія. Такимъ образомъ вліяніе примѣсей выражается въ повышеніи упругости плавленія, причемъ это повышеніе будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше процентное содержаніе примѣсей. Вслѣдствіе этого, если послѣ полученія кристаллическаго нафталина станемъ уменьшать давленіе, объемъ нафталина не будетъ измѣняться по изотермѣ EDFG, соотвѣтствующей измѣненію объема чистаго кристаллическаго вещества, а станетъ возрастать, начиная съ нѣкоторой точки, быстрѣе вслѣдствіе плавленія части вещества. Но такъ какъ по мѣрѣ расплавленія процентное содержаніе примѣсей въ растворѣ уменьшается, то и повышеніе давленія сравнительно съ p_1 становится меньше, такъ что давленіе асимптотически приближается къ упругости плавленія p_1, около которой въ точкѣ B получается угловая точка. Укажу, что такое вліяніе примѣси сказалось весьма замѣтно въ опытахъ Heydweiller'а съ ментоломъ, которые онъ при-

водилъ въ качествѣ доказательства возможности непрерывнаго перехода изъ кристаллическаго состоянія въ жидкое. Въ этомъ опытѣ въ запаянной трубкѣ получилось явленіе равновѣсія переохлажденной жидкости и кристалла. Между тѣмъ Tammann, повѣряя этотъ опытъ съ тщательно очищеннымъ ментоломъ, ничего подобнаго не получилъ.

Кромѣ опытовъ Amagat и Barus'a извѣстны были еще наблюденія Damien'a и Demerliac'a, дававшія весьма замѣтную вогнутость кривой упругости плавленія, какъ видно, напримѣръ, изъ слѣдующей формулы выражающей результаты Damien'a для нафтиламина

$$tr\, t_{p=1} + 0.017\,(p-1) - 0.080103\,(p-1)^2,$$

изъ которой получается для t maximum при 83 атмосферахъ. Сопоставленіе этого невысокаго давленія, при которомъ должно, по опытамъ Damien'a, получаться равенство объемовъ жидкаго и кристаллическаго вещества (ибо этому условію и соотвѣтствуетъ maximum въ кривой упругости плавленія) съ данными Barus'a, показывающими, что, напримѣръ, разность объемовъ жидкаго и твердаго нафталина при 83° и 80 атм. равна 23%, а при 100° и 567 атм. равна 19.8%, т. е. лишь очень мало измѣнилась, заставила Tammann'a усомниться въ правильности выводовъ Damien'a и найти источникъ ошибокъ въ его опытахъ.

Damien поступалъ слѣдующимъ образомъ: онъ наносилъ тонкій слой изслѣдуемаго вещества на вызолоченную поверхность металлической коробки, раздѣленной на двѣ части, сквозь которыя пропускалась вода различной температуры. Если въ одной половинѣ температура воды была выше температуры плавленія, а въ другой ниже, то изслѣдуемое вещество надъ первой половиною было въ твердомъ состояніи, а надъ второй — въ жидкомъ, и граница ихъ, рѣзко замѣтная на вызолоченной поверхности, приходилась въ опредѣленномъ ея мѣстѣ. При увеличеніи внѣшняго давленія,—что у Damien'a вызывалось накачиваніемъ воздуха въ камеру надъ этою металлическою коробкою,—температура плавленія повышалась, и граница поэтому перемѣщалась въ сторону болѣе теплой половины коробки. По мнѣнію Tammann'a недостатокъ этихъ опытовъ заключается именно въ томъ, что давленіе вызывалось накачиваніемъ воздуха, который при этомъ растворялся все болѣе и болѣе въ изслѣдуемомъ веществѣ и тѣмъ понижалъ температуру плавленія, такъ что это пониженіе вскорѣ начинало превышать повышеніе температуры плавленія отъ увеличенія давленія.

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

Пр. Доц. **Б. Вейнбергъ.**

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

(*Продолженіе* *).

X. Метаполюсы треугольниковъ.

1. Въ плоскости тр-ка ABC возьмемъ произвольную точку M и обозначимъ углы AMB, BMC и CMA соотвѣтственно чрезъ Z, X и У, такъ что

$$X = \angle BMC,\ У = \angle CMA,\ Z = \angle AMB.$$

Если точка M находится внутри тр-ка, то **)

$$X + У + Z = 360^0.$$

Если же точка M лежитъ внѣ тр-ка, то одинъ изъ угловъ X, У, Z равенъ суммѣ двухъ другихъ, напр.

$$X = У + Z.$$

2. Если при этомъ точка находится въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ тр-ка, напр. въ вертикальномъ углу A, какъ точка M′ (фиг. 1), то

$$X < A.$$

Но внѣшняя точка относительно тр-ка можетъ находиться еще въ части плоскости, ограниченной одной стороной тр-ка, напр. BC, и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ, какъ точка M″ (фиг. 1). При этомъ точка можетъ быть внутри окружности ABC, описанной около тр-ка, внѣ ея или на самой окружности. Легко убѣдиться, что для точки, лежащей внутри окружности ABC

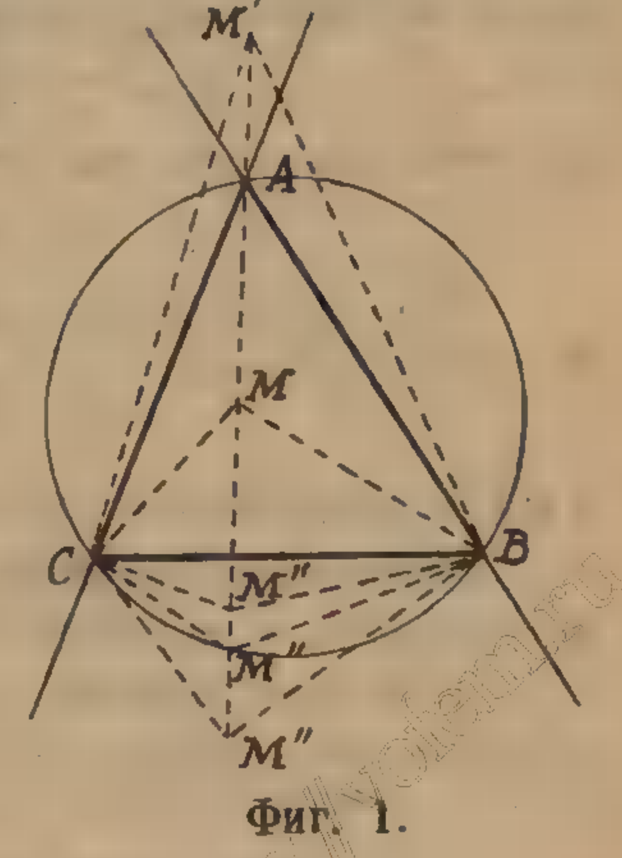
$$X + A > 180^0,\ У > B,\ Z > C;$$

для точки, лежащей внѣ окружности ABC

$$X + A < 180^0,\ У < B,\ Z < C;$$

для точки, лежащей на окружности ABC

$$X + A = 180,\ У = B,\ Z = C.$$



Фиг. 1.

*) „Вѣстникъ“ № 273.

**) Здѣсь берутся абсолютныя величины угловъ, не принимая во вниманіе ихъ знаковъ. Ср. IX, 3.

3. Всякая окружность, имѣющая хордой сторону тр-ка, дѣлится этою хордою на двѣ части; изъ нихъ ту часть, которая лежитъ относительно стороны тр-ка по ту-же сторону, какъ и противолежащая ей вершина, будемъ называть *внутренней дугой*, а другую — *внѣшней*.

Представимъ себѣ три окружности, пересѣкающіяся въ одной точкѣ и имѣющія хордами стороны тр-ка ABC. Общая точка этихъ окружностей можетъ быть или внутри тр-ка, напр. въ M (фиг. 1), или внѣ его—въ M′ или въ M″. Въ первомъ случаѣ всѣ три окружности пересѣкаются своими внутренними дугами. Во второмъ случаѣ, когда общая точка ихъ M′ находится въ вертикальномъ углу A тр-ка, чрезъ эту точку проходитъ внутренняя дуга окружности BC и внѣшнія дуги окружностей AB и AC. Наконецъ, въ третьемъ случаѣ, когда общая точка окружностей M″ находится въ части плоскости, ограниченной стороной тр-ка BC и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ, чрезъ эту точку проходятъ внутреннія дуги окружностей AB и AC и внѣшняя окружности BC.

Внѣшнія дуги всѣхъ трехъ окружностей не могутъ имѣть общей точки.

4. **Теорема.** *Если три окружности, имѣющія хордами стороны тр-ка, пересѣкаются въ одной точкѣ, то три окружности, симметричныя съ ними относительно сторонъ того же тр-ка, также пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Обозначимъ чрезъ α, β, γ величины внутреннихъ, а чрезъ α', β', γ' величины внѣшнихъ дугъ окружностей, пересѣкающихся въ одной точкѣ и имѣющихъ хордами стороны BC, CA и AB тр-ка ABC; для окружностей симметричныхъ относительно сторонъ этого тр-ка величины внутреннихъ дугъ будутъ α', β', γ', а внѣшнихъ α, β, γ.

a). Если общая точка M трехъ данныхъ окружностей находится внутри тр-ка (фиг. 2), то чрезъ эту точку проходятъ внутреннія дуги этихъ окружностей; поэтому, если углы вписанные въ дуги α, β, γ суть

$$X = \angle AMC,\quad У = \angle CMA,\quad Z = \angle AMB,$$

то углы вписанные въ дуги α', β', γ' соотвѣтственно равны

$$180^0 - X,\ 180^0 - У,\ 180^0 - Z.$$

Для окружностей, симметричныхъ съ данными, углы вписанныя въ дуги внутреннія α', β', γ' суть

$$180^0 - X,\ 180^0 - У,\ 180^0 - Z,$$

и углы вписанные въ дуги внѣшнія α, β, γ соотвѣтственно равны X, У и Z.

Обозначимъ чрезъ N точку пересѣченія двухъ окружностей симметричныхъ съ данными относительно сторонъ тр-ка AB и AC.

Если предположить, что точка N находится внутри тр-ка ABC, то чрезъ нее должны пройти внутреннія дуги β' и γ' двухъ окружностей, симметричныхъ съ данными; поэтому

$$\angle ANB = 180^0 - Z,\quad \angle ANC = 180^0 - У$$

и

$$\angle BNC = 360^0 - (\angle ANB + \angle ANC) = У + Z,$$

а потому третья изъ окружностей, симметричныхъ съ данными, [illegible] можетъ пройти чрезъ точку N, ибо уголъ вписанный во внутреннюю дугу α' этой окружности равенъ $180^0 - X$.

Предположимъ, что точка N находится въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ тр-ка. напр. въ вертикальномъ углу A; тогда чрезъ эту точку пройдутъ внѣшнія дуги β и γ пересѣкающихся [illegible] ней симметричныхъ окружностей, поэтому

$$\angle ANB = Z, \quad \angle ANC = У$$

и

$$\angle BNC = \angle ANB + \angle ANC = У + Z,$$

а потому третья изъ симметричныхъ окружностей не пройдетъ чрезъ N, ибо внутренняя дуга ея α' [illegible]ѣщаетъ уголъ равный X.

Наконецъ, если точка N находится въ части плоскости, ограниченной одной стороной тр-ка, напр. BC, и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ (фиг. 2), то чрезъ N пройдутъ внутреннія дуги β' и γ' пересѣкающихся въ этой точкѣ симметричныхъ окружностей, поэтому

$$\angle ANB = 180^0 - Z, \quad \angle ANC = 180^0 - У$$

и

$$\angle BNC = \angle ANB + \angle ANC = 360^0 - (У + Z);$$

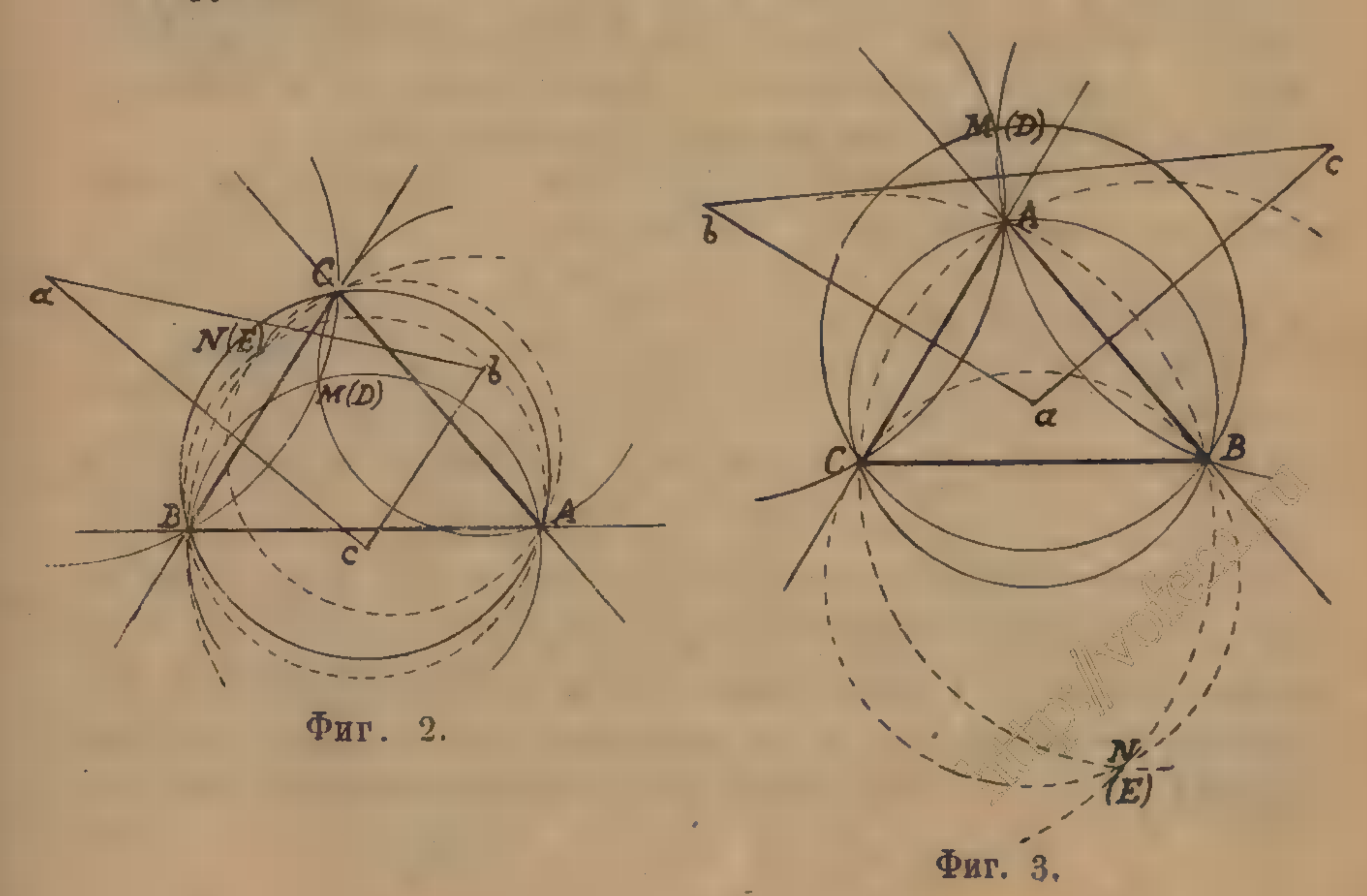
но точка M предположена внутри тр-ка, поэтому

$$X + У + Z = 360^0;$$

слѣдовательно

$$\angle BNC = X,$$

а потому чрезъ точку N пройдетъ внѣшняя дуга α' третьей симметричной окружности.



Фиг. 2.

Фиг. 3.

Итакъ, если три данныя окружности пересѣкаются въ одной точкѣ внутри тр-ка, то симметричныя съ ними окружности также пересѣкаются въ одной точкѣ, лежащей въ части плоскости, ограниченной одной стороной тр-ка и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ.

b). Если общая точка M трехъ данныхъ окружностей лежитъ внѣ тр-ка въ одномъ изъ вертикальныхъ его угловъ, напр. A, то углы

$$X = \angle BMC,\ У = \angle AMC,\ Z = \angle AMB$$

удовлетворяютъ равенству

$$X = У + Z \text{ или } X - У - Z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ чрезъ M проходятъ внѣшнія дуги β' и γ' данныхъ окружностей AC и AB, вмѣщающія углы У и Z, и внутренняя дуга α третьей данной окружности BC, вмѣщающая уголъ X.

Внутреннія дуги α', β', γ' симметричныхъ окружностей при этомъ вмѣщаютъ углы: $180^0 - X$, У и Z, а внѣшнія дуги α, β, γ тѣхъ-же окружностей — углы X, $180^0 -$ У, $180 - Z$.

Обозначимъ чрезъ N общую точку трехъ симметричныхъ окружностей (если таковая существуетъ).

Эта точка N не можетъ быть внутри тр-ка, ибо въ такомъ случаѣ чрезъ N проходили бы внутреннія дуги α', β', γ' симметричныхъ окружностей и вписанные въ нихъ углы BNC, CNA и ANB должны-бы были удовлетворять равенству

$$\angle BNC + \angle CNA + \angle ANB = 360^0,$$

въ дѣйствительности-же:

$$\angle BNC + \angle CNA + \angle ANB = (180^0 - X) + У + Z = 180^0,$$

такъ-какъ $$X - У - Z = 0.$$

Точка N не можетъ быть также и ни въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ тр-ка. Ибо, если-бы точка N находилась въ вертикальномъ углу A, то чрезъ N проходили-бы внѣшнія дуги β и γ и внутренняя дуга α' симметричныхъ окружностей, вмѣщающія углы

$$\angle ANC = 180^0 - У,\ \angle BNA = 180^0 - Z \text{ и } \angle BNC = 180^0 - X;$$

углы-же эти, при условіи

$$X - У - Z = 0$$

не удовлетворяютъ равенству

$$\angle BNC = \angle BNA + \angle CNA \text{ или } \angle BNC - \angle CNA - \angle ANB = 0,$$

такъ-какъ

$$\angle BNC - \angle CNA - \angle ANB = 180^0 - X - (180^0 - У) - (180^0 - Z) =$$
$$= -180^0 - (X - У - Z) = -180^0.$$

Такимъ-же разсужденіемъ можно убѣдиться, что точка N не можетъ быть въ вертикальныхъ углахъ тр-ка B и C.

Предположивъ, наконецъ, что точка N находится въ части плоскости, ограниченной стороной тр-ка BC и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ (фиг. 3) и замѣтивъ, что чрезъ N должны проходить внутреннія дуги β' и γ' и внѣшняя дуга α симметричныхъ окружностей, вмѣщающія углы

$$\angle ANC = У,\ \angle ANB = Z \text{ и } \angle BNC = X,$$

увидимъ, что при условіи

$$X = У + Z$$

равенство

$$\angle BNC = \angle ANB + \angle ANC$$

удовлетворяется. Слѣдовательно, три симметричныя окружности могутъ [redacted] должны имѣть общую точку N только въ этомъ послѣднемъ ея положеніи относительно треугольника. Дѣйствительно, если N въ этомъ положеніи относительно тр-ка есть пересѣченіе двухъ симметричныхъ окружностей AB и AC, то

$$\angle BNA = Z, \quad \angle CNA = У,$$

и

$$\angle BNC = \angle BNA + \angle CNA = У + Z = X;$$

слѣдовательно, внѣшняя дуга α третьей симметричной окружности, вмѣщающая уголъ X, также проходитъ чрезъ точку N.

Итакъ, если три данныя окружности пересѣкаются въ одной точкѣ, находящейся въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ тр-ка, то окружности симметричныя [redacted] пересѣкаются въ одной точкѣ, находящейся въ части плоскости, ограниченной стороной тр-ка и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ.

c). Если общая точка [redacted] трехъ данныхъ окружностей находится въ части тр-ка, ограниченной его стороной BC и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ, то симметричныя съ ними окружности не могутъ пересѣкаться въ одной точкѣ, занимающей подобное-же положеніе относительно тр-ка какъ и точка M. Въ этомъ можно убѣдиться разсужденіями, подобными предыдущимъ, если замѣтить, что въ этомъ случаѣ внутреннія дуги α, β, γ данныхъ окружностей вмѣщаютъ углы $180^0 - X$, У, Z, а внѣшнія α', β', γ' углы X, $180^0 - У$, $180^0 - Z$; для окружностей симметричныхъ съ данными—наоборотъ: внутреннія дуги α', β', γ' вмѣщаютъ углы X, $180^0 - У$, $180^0 - Z$, а внѣшнія α, β, γ—углы $180^0 - X$, У, Z.

Но принявъ [redacted] фиг. 2 [redacted] 3 окружности ANB, BNC CNA за данныя, а окружности AMB BMC, CMA за симметричныя съ ними, придемъ къ заключенію, что если данныя окружности пересѣкаются въ одной точкѣ, лежащей въ части плоскости, ограниченной одной стороной тр-ка и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ, то симметричныя окружности также пересѣкаются въ одной точкѣ, находящейся или внутри тр-ка или въ одномъ изъ его вертикальныхъ угловъ.

Такимъ образомъ теорема доказана; вмѣстѣ съ тѣмъ указана зависимость между положеніями общихъ точекъ данныхъ окружностей и окружностей симметричныхъ съ ними относительно тр-ка.

5. **Теорема.** *Если внѣшнія дуги трехъ окружностей, описанныхъ на сторонахъ даннаго тр-ка, вмѣщаютъ углы равные угламъ другого тр-ка, то такія три окружности пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Пусть даны два тр-ка ABC и A'B'C'. На сторонахъ тр-ка ABC опишемъ окружности AB, BC [redacted] AC такъ, чтобы внѣшнія дуги ихъ вмѣщали соотвѣтственно углы C', A' и B' (фиг. 2 и 3). Обозначимъ чрезъ D пересѣченіе окружностей AB и AC. Если точка D находится внутри тр-ка ABC (фиг. 2), то

$$\angle ADB = 180^0 - C', \quad \angle ADC = 180^0 = B'$$

и

$$\angle BDC = 360^0 - (\angle ADB + \angle ADC) = C' + B' = 180^0 - A',$$

и потому внутренняя дуга окружности BC, вмѣщающая уголъ $180^0 - A'$ также пройдетъ чрезъ точку D.

Если точка D получена въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ тр-ка ABC, напр. въ вертикальномъ углу A (фиг. 3), то будемъ имѣть:

$$\angle ADB = C', \ \angle ADC = B'$$

и

$$\angle BDC = \angle ADB + \angle ADC = B' + C' = 180^0 - A';$$

а потому и въ этомъ случаѣ внутренняя дуга окружности BC пройдетъ чрезъ точку D. Теорема доказана.

Замѣтимъ, что разсматриваемыя окружности не могутъ имѣть общую точку D внѣ тр-ка въ части плоскости, ограниченной одной его стороной, напр. BC, и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ ибо въ этомъ случаѣ должно-бы быть

$$\angle BDC = \angle ADB + \angle ADC.$$

что невозможно, такъ-какъ чрезъ D проходили-бы внутреніе дуги окружностей AB и AC и внѣшняя окружности BC, вмѣщающія углы

$$\angle ADB = 180^0 - C', \ \angle ADC = 180^0 - B' \text{ и } \angle BDC = A'.$$

6. **Слѣдствіе**. *Три окружности, описанныя на сторонахъ тр-ка ABC такъ, что внутреннія дуги ихъ вмѣщаютъ углы равные угламъ тр-ка $A'B'C'$, также пересѣкаются въ одной точкѣ,* ибо эти окружности симметричны съ окружностями предыдущей теоремы относительно сторонъ тр-ка ABC (4).

Общая точка E этихъ окружностей не можетъ быть ни внутри тр-ка ABC ни въ одномъ изъ его вертикальныхъ угловъ; она всегда лежитъ внѣ тр-ка, въ части плоскости, ограниченной одной изъ сторонъ тр-ка и продолженіями двухъ другихъ его сторонъ (фиг. 2 и 3). (4, a, b).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

Д. Е.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

№ 607. Черезъ данную точку даннымъ радіусомъ провести окружность, встрѣчающую двѣ данныя параллельныя прямыя по хордѣ данной длины *).

И. Александровъ (Тамбовъ).

*) Подъ хордой, по которой параллельныя прямыя встрѣчаютъ окружность, подразумѣвается хорда, стягивающая заключенную между параллельными прямыми дугу.

№ 608. Опредѣлить x изъ уравненія

$$x^x + 139x^{-2x} - 108x^{-2x} = 32.$$

И. Поршневъ (Вятка).

№ 609. Рѣшить уравненіе

$$x^7 + a^7 + b^7 = (x + a + b)^7.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ).

№ 610. Черезъ точку O, лежащую въ плоскости треугольника ABC проведены прямыя AO, BO, CO, встрѣчающія стороны треугольника соотвѣтственно въ точкахъ D, E, F. Доказать равенство

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$

П. Полушкинъ (Знаменка).

№ 611. Опредѣлить площадь трапеціи по четыремъ ея сторонамъ.

К. Пеніонжкевичъ (Лубны).

№ 612. Два наблюдателя помѣстились у колодца: A вверху, а B на днѣ. Первый наблюдатель A ударяетъ въ колоколъ; какъ только B услышитъ звукъ колокола, тотчасъ производитъ выстрѣлъ снизу вверхъ. A замѣчаетъ моментъ, когда выстрѣлъ слышенъ вверху и моментъ, когда пуля достигаетъ вершины колодца. Опредѣлить:

1) глубину колодца,
2) начальную скорость пули,

если извѣстно, что A услышалъ выстрѣлъ черезъ двѣ секунды послѣ сигнала въ колоколъ, а пуля достигла вершины колодца спустя секунду послѣ того, какъ A слышалъ выстрѣлъ.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 556 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^5 + (a + 1)x^4 + (a + b)x^3 + (b + na)x^2 + n(a + n)x + n^2 = 0.$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$(x + 1)(x^4 + ax^3 + bx^2 + nax + n^2) = 0,$$

приводимъ данное уравненіе къ двумъ уравненіямъ, изъ которыхъ первое даетъ

$$x_1 = -1,$$

а второе,

$$x^4+ax^3+bx^2+nax+n^2=0, \qquad (1)$$

или

$$x^2+\frac{n^2}{x^2}+a\left(x+\frac{n}{x}\right)+b=0 \qquad (2)$$

легко рѣшается подстановкой

$$x+\frac{n}{x}=y \qquad (3).$$

Дѣйствительно, изъ уравненія (3) имѣемъ:

$$x^2+\frac{n^2}{x^2}+2n=y^2 \qquad (4).$$

На основаніи равенствъ (3) и (4) уравненіе (2) приводится къ виду

$$y^2+ay+b-2n=0.$$

Называя корни этого квадратнаго уравненія черезъ α_1 и α_2 находимъ на основаніи равенства (3):

$$x^2-\alpha_1x+n=0,\ x^2-\alpha_2x+n=0,$$

откуда опредѣляются вообще еще четыре новыхъ корня.

Другой способъ рѣшенія заключается въ примѣненіи къ уравнннію (1) подстановки

$$Z=x\sqrt{n},$$

при помощи которой это уравненіе преобразовывается въ возвратное.

В. Шатуновъ (Полтава); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

№ 563 (3 сер.). *По данному углу* C *треугольника* ABC *и равенству*

$$AB.BC=2AD.DC,$$

гдѣ D — *точка прикосновенія вписаннаго круга къ сторонѣ* AC, *найти остальные углы треугольника.*

Обозначая стороны треугольника соотвѣтственно черезъ a, b, c имѣемъ по извѣстнымъ тригонометрическимъ формуламъ:

$$AD=\frac{b+c-a}{2},\ DC=\frac{b-c+a}{2}.$$

Согласно условію

$$ac=2.\ \frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{b-c+a}{2}=\frac{b^2-(a-c)^2}{2},$$

откуда послѣ элементарныхъ преобразованій найдемъ, что

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Слѣдовательно

$$\angle B = \frac{\pi}{2}, \angle A = \frac{\pi}{2} - \angle C.$$

П. Полушкинъ (Знаменка); *О. Бѣлоярцевъ* (Казань); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

№ 564 (3 сер.). *Опредѣлить*:

1) *Плотность алкоголя*, 2) *плотность твердаго тѣла, которое вѣситъ въ пустотѣ 2100 грамм., въ водѣ 2000 грамм. и въ алкоголѣ 2020 граммовъ.*

Вѣсъ воды, взятой въ объемѣ, равномъ объему даннаго тѣла, есть

2100 гр. — 2000 гр. = 100 гр.,

вѣсъ спирта, взятаго въ томъ же объемѣ, есть

2100 гр. — 2020 гр. = 80 гр.

Поэтому удѣльный вѣсъ тѣла равенъ

2100 гр.: 100 гр. = 21,

а удѣльный вѣсъ алкоголя равенъ

80 гр.: 100 гр. = 0,8.

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону); *Свирская*;. *Соколова*.

№ 539 (3 сер.) *Данъ квадратъ ABCD. На діагоналяхъ его AC и BD взяты соотвѣтственно точки E и F такъ, что площади треугольниковъ AFE и BCE равны между собой. Прямыя AF и BE продолжены до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ G. Найти геометрическое мѣсто точекъ G.*

Предположимъ, что треугольники BCE и AFE лежатъ по разныя стороны прямой AC въ случаѣ, если точка E лежитъ внутри отрѣзка AC, и по одну сторону прямой AC въ случаѣ, если точка E лежитъ на продолженіи отрѣзка AC *).

Тогда изъ равенства площадей треугольниковъ BCE и AFE вытекаетъ равенство площадей треугольника ABC и четыреугольника ABEF. Проведемъ черезъ точку F прямую, параллельную AC до пересѣченія съ BE въ точкѣ M.

---

*) Въ противномъ случаѣ мы получили бы другое геометрическое мѣсто, именно равностороннюю гиперболу.

Тогда

$$\triangle\ ABM = \square\ ABEF = \triangle\ ABC,$$

а слѣдовательно точка M лежитъ на прямой CD.

Изъ параллельности прямыхъ AC и MF, называя черезъ O точку пересѣченія діагоналей, находимъ:

$$\frac{OF}{CM} = \frac{OD}{CD} = \frac{OA}{BC},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\triangle\ AOF \sim \triangle\ BCM,$$

а потому

$$\angle\ CBM = \angle\ OAF,$$

откуда, сравнивая углы треугольниковъ CBE и AGE находимъ, что

$$\angle\ AGB = \angle\ ACB = \frac{\pi}{4}.$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто точки G есть окружность, описанная около даннаго квадрата.

Б. Фрейманъ (Тамбовъ); *В. Буханцевъ* (Новочеркасскъ)

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 3-го Октября 1900 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.